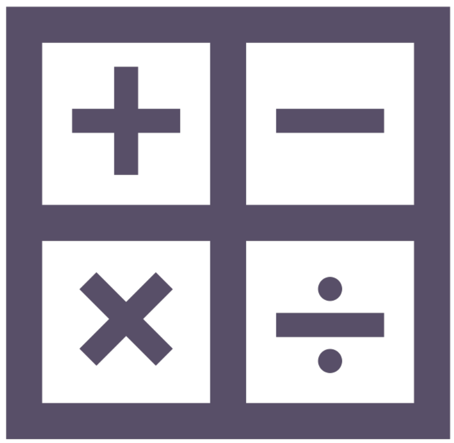
GOBIERNO DE PUERTO RICO

DEPARTAMENTO DE EDUCACIÓN
Subsecretaría para Asuntos Académicos

MÓDULO PARA REMEDIAR

Matemáticas



Décimo grado

enero 2020

Nombre del estudiante: ______________________________________

Número de SIE: ____

Nombre de la escuela: ______________________________________

Código de la escuela: _____________ **Municipio:** _________________

P.O. Box 190759, San Juan, PR 00919-0759 • Tel.: (787)773-3060/3064

DEPARTAMENTO DE EDUCACIÓN GOBIERNO DE PUERTO RICO

Querido estudiante:

Hemos trabajado con la ilusión de presentarte este módulo como una herramienta para desarrollar las destrezas que necesitas para la clase de Matemáticas. Encontrarás ejercicios de selección múltiple para que escojas la respuesta correcta.

El Departamento de Educación validará tu participación y tu esfuerzo al contestar los ejercicios en este módulo. La puntuación obtenida se sumará a tus notas e informe de progreso académico. Esperamos, que una vez finalices el décimo grado, hayas obtenido la misma satisfacción que nosotros al crear estos ejercicios para ayudarte.

ES.A.11.0 Realiza operaciones aritméticas con polinomios.

Un **polinomio** es una expresión algebraica que muestra la suma de monomios.

Los polinomios se suman y se restan simplificando los términos semejantes.
La suma y resta de polinomios se puede resolver de forma horizontal y de forma vertical. Al resolver polinomios de forma vertical se alinean los términos semejantes.

Ejemplo. Suma el polinomio de forma horizontal.

$(4x^2 + 3x - 2) + (x^2 - 5)$

$= 4x^2 + x^2 + 3x - 2 - 5$	Quitar paréntesis
$= 4x^2 + x^2 + 3x - 2 - 5$	Agrupar términos semejantes
$= 5x^2 + 3x - 7$	Sumar y restar términos semejantes

Para multiplicar polinomios se multiplica cada término de un polinomio por cada término del otro polinomio. Luego, se suma las respuestas y se simplifica.

Ejemplo. Halla el producto.

1) $(6a^2)(3a^3) = (6 \cdot 3) \cdot (a^2 \cdot a^3) = 18a^{2+3} = 18a^5$

Generalmente cuando un polinomio es dividido entre un binomio hay un residuo.

Ejemplo. Considera la función polinomial $(x) = x^2 - 8x + 6$.

Divide el polinomio entre el binomio x - 2.

Podemos realizar la división en cualquier método.

Método 1: División larga

$$\begin{array}{r|l} & x-6 \\ \hline x-2 & x^2-8x+6 \\ & \underline{x^2-2x} \\ & \quad -6x+6 \\ & \quad \underline{-6x+12} \\ & \qquad\quad -6 \end{array}$$

El residuo es -6.

El teorema del residuo establece que en la división sintética $\frac{P(x)}{x-a}$ el residuo es el valor numérico de P(x) cuando x = a. Es decir, $R=P(a)$.

1. La suma de las raíces del polinomio: $x^2 + 5x + 6$

ⓐ 6

ⓑ 5

ⓒ 2

ⓓ 3

2. Simplifica el siguiente polinomio: $4x^2 + 8x^3 - 9x^2 + 2x$

ⓐ $5x^3$

ⓑ $8x^3 + 13x^2 + 2x$

ⓒ $8x^3 - 5x^4 + 2x$

ⓓ $8x^3 - 5x^2 + 2x$

3. Simplifica el siguiente polinomio: $8x^3 + 9x^3 - 10x^2 + 20x$

ⓐ $-x^3$

ⓑ $-x^3 - 10x^2 + 20x$

ⓒ $17x^3 - 10x^2 + 20x$

ⓓ $17x^3 + 10x^2 + 20x$

4. Simplifica el siguiente polinomio: $4x^2 + 8x^3 - 9x^2 + 2x$

ⓐ $5x^3$

ⓑ $8x^3 + 13x^2 + 2x$

ⓒ $8x^3 - 5x^4 + 2x$

ⓓ $8x^3 - 5x^2 + 2x$

5. Encuentra la diferencia de: $3x^2 - x - 17$ y $12 - 6x^2 - 11x$

ⓐ $9x^2 + 10x - 29$

ⓑ $3x^2 - 10x + 5$

ⓒ $-3x^2 + 12x - 5$

ⓓ $-3x^2 - 12x - 5$

6. Calcula el residuo de la siguiente división de polinomios. $\dfrac{x^3 + x^2 - 2x}{x + 2}$

ⓐ 2

ⓑ -2

ⓒ 0

ⓓ 1

ES.F.22.0 Entiende, interpreta y analiza funciones.

Funciones algebraicas

Las **funciones algebraicas** son aquellas cuya regla de correspondencia es una expresión algebraica, siendo a la vez una función que satisface una ecuación polinómica cuyos coeficientes son a su vez polinomios.

Dentro de las funciones algebraicas podemos nombrar a las funciones polinómicas. Dichas funciones tienen una gran aplicación en la preparación de modelos que representan fenómenos reales, tales como la distancia recorrida por un carro a velocidad constante, la compra de cierta cantidad de objetos a un precio unitario, el salario de un trabajador más su comisión. En las funciones algebraicas las operaciones que hay que efectuar con la variable independiente son: suma, resta, multiplicación, división, potenciación y radicación.

Las funciones algebraicas pueden ser:
Funciones explícitas que se pueden obtener las imágenes de x por simple sustitución.
$f(x) = 5x - 2$
Funciones implícitas que no se pueden obtener las imágenes de x por simple sustitución, sino que es preciso efectuar operaciones.
$5x - y - 2 = 0$
Funciones polinómicas que vienen definidas por un polinomio.
$f(x) = a_0 + a_1 x + a_1 x^2 + a_1 x^3 + \cdots + a_n x_n$
Funciones constantes donde el criterio viene dado por un número real.
$f(x)= k$

7. Considera la función de la función $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$, si $f(1) = 0$, halla las otras raíces.

ⓐ $x = 2, x = 3$

ⓑ $x = -2, x = -3$

ⓒ. $x = 0, x = 5$

ⓓ $x = -1, x = 0$

8. Factoriza la ecuación de la función $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + x$ si $f(0) = 0$.

ⓐ $x(x-1)(x-2)$

ⓑ $x(x+1)(x-2)$

ⓒ $x(x-1)(2x-1)$

ⓓ $x(x+1)(2x+1)$

ES.A.16.1 Resuelve ecuaciones e inecuaciones de una variable.

9. Factoriza: $x^2 - 25$

ⓐ $(x+5)(x+5)$

ⓑ $(x-5)(x-3)$

ⓒ $(x+5)(x-5)$

ⓓ $x(x-5)$

10. Factoriza: $9x^2 - 16$

ⓐ $(3x+4)(3x-4)$

ⓑ $(3x-5)(x-3)$

ⓒ $(4x+5)(4x-5)$

ⓓ $4x(x-5)$

11. Factoriza: $m^2 - 4m - 21 =$ _____

ⓐ $(m-7)(m+3)$

ⓑ $(m+7)(m-3)$

ⓒ $(m-7)(m-3)$

ⓓ $(m+7)(m+3)$

12. Factoriza completamente: $8x^2 + 28x + 12 =$ _____

Ⓐ $2(x + 2)(4x + 3)$
Ⓑ $4(x + 1)(2x + 3)$
ⓒ $2(x + 3)(2x + 1)$
ⓓ $4(x + 3)(2x + 1)$

13. Encuentra los ceros de: $f(x) = x^2 + 11x - 42$

Ⓐ $\{-3, -14\}$
ⓑ $\{-3, 14\}$
ⓒ $\{3, -14\}$
ⓓ $\{-14, 3\}$

14. Halla la solución de la ecuación cuadrática: $-3 - y^2 = 24$

ⓐ $\{\pm 3\sqrt{3}\}$
ⓑ $\{\pm 9\sqrt{3}\}$
ⓒ $\{\pm 3i\sqrt{3}\}$
ⓓ $\{\pm 9i\sqrt{3}\}$

15. Resuelve la siguiente ecuación: $\sqrt{2x+3} = 3 - \sqrt{2x}$

ⓐ $\frac{1}{4}$
ⓑ $\frac{1}{2}$
ⓒ 2
ⓓ 4

16. Encuentra las soluciones para la siguiente ecuación cuadrática: $y = x^2 + 2x - 2$

ⓐ $2, 1$

ⓑ $-1 + \sqrt{3}, -1-\sqrt{3}$

ⓒ $-2+ \sqrt{3}, -2-\sqrt{3}$

ⓓ $12, 4$

ES.A.17.0 Resuelve sistemas de ecuaciones e inecuaciones.

Inecuaciones

Una **inecuación** es una desigualdad algebraica en la cual los conjuntos (miembros) se encuentran relacionados por los signos < (menor que), > (mayor que), ≤ (igual o menor que), ≥ (mayor o igual que).

Para solucionar una inecuación, es necesario descubrir el conjunto de los valores de la variable que permite verificarla.

Por ejemplo, tomemos la inecuación $3x - 4 < 8$. La resolución requiere seguir pasos tal como se hace con las ecuaciones (que son igualdades con números y letras relacionadas entre sí mediante operaciones matemáticas):

$$3x - 4 < 8$$

$$3x < 12$$

$$x < 4$$

17. Resuelve la inecuación: $2x - 5 \leq 3$

Ⓐ $x \geq 1$

Ⓑ $x \geq 4$

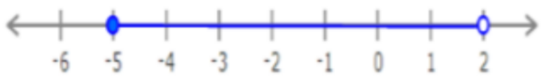
Ⓒ $x \leq 1$

Ⓓ $x \leq 4$

18. Resuelve la inecuación: $x + 11 < 9$

ⓐ $x < -2$
ⓑ $x \leq -2$
ⓒ $x < 2$
ⓓ $x \leq 2$

19. Identifica la solución de la siguiente gráfica:



Ⓐ $-5 \leq x < 2$

Ⓑ $-5 < x < 2$

ⓒ $x < -5$

ⓓ $x > 2$

20. Resuelve para x: $2x + 3 > 21$

ⓐ $x < 9$

ⓑ $x < 12$

ⓒ $x > 12$

ⓓ $x > 9$

21. Resuelve: $7y + 2 \leq -y + 18$

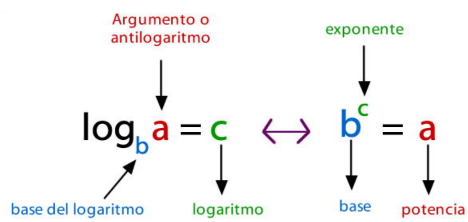
ⓐ $y \leq 2$

ⓑ $y \geq 3$

ⓒ $y \geq 2$

ⓓ $y \leq 3$

(+)ES.A.20. Resuelve ecuaciones logarítmicas y exponenciales.



Reglas de Logaritmos

Regla Base: $log_b a = n \leftrightarrow b^n = a$

1	Log de unidad	$log_b 1$	$= 0$
2	Log de base	$log_b b$	$= 1$
3	Log de producto	$log_b(a \cdot c)$	$= log_b a + log_b c$
4	Log de Cociente	$log_b\left(\frac{a}{c}\right)$	$= log_b a - log_b c$
5	Log de Potencia	$log_b a^n$	$n \cdot log_b a$
6	Log de Raíz	$log_b \sqrt[n]{a}$	$= \frac{1}{n} log_b a$
7	Cambio de Base	$log_b a$	$= \frac{log_c a}{log_c b}$

Las **ecuaciones logarítmicas** son aquellas ecuaciones en las que al menos una de las incógnitas es un logaritmo. Para poder resolver estas ecuaciones debemos recordar las propiedades de los logaritmos (suma, resta, división, multiplicación, etc.). En la ecuación logarítmica la incógnita (o incógnitas) se encuentra multiplicando o dividiendo a los logaritmos, en sus bases o en el argumento de los logaritmos (dentro de los logaritmos).

Ejemplo:

$$2^{x-1} + 3 = 7$$
$$2^{x-1} = 4$$
$$\log_2(4) = x - 1$$
$$2 = x - 1$$
$$3 = x$$

Una ecuación logarítmica tiene la variable dentro del logaritmo. Para su resolución se debe considerar la definición de logaritmo junto con sus propiedades. Aquí se presenta dicha definición junto con las principales propiedades:

- $\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x,\ a > 0,\ a \neq 1,\ x > 0$
- $\log_a (P \cdot Q) = \log_a P + \log_a Q$
- $\log_a \left(\frac{P}{Q}\right) = \log_a P - \log_a Q$
- $\log_a x^n = n \cdot \log_a x$

Ejemplo:

$$\log_2(x+5) = 9$$
$$2^9 = x + 5$$
$$512 = x + 5$$
$$507 = x$$

Una **ecuación exponencial** es aquella en la que aparecen exponenciales, es decir, potencias cuyos exponentes son expresiones en las que aparece la incógnita, x.

El método de resolución consiste en conseguir una igualdad de exponenciales con la misma base para poder igualar los exponentes.

Ejemplos:

$3^{2x} = 3^{6}$

$$5^{2x-2} = 5^{2x} \cdot 5^{-2} = \frac{(5^x)^2}{25}$$

$$25^{x-1} = 25^{x} \cdot 25^{-1} = \frac{(5^2)^x}{25} = \frac{5^{2x}}{25}$$

$$5^{2x-3} = 5^{2x} \cdot 5^{-3} = \frac{5^{2x}}{125}$$

Una **ecuación exponencial** es aquella ecuación en la que aparecen exponenciales, es decir, potencias cuyos exponentes son expresiones en las que aparece la incógnita, x. Para despejar la variable, se deben aplicar propiedades de la potenciación y del logaritmo. Una de las más importantes es $\log_a x^n = n \cdot \log_a x$

Ejemplo A
Resuelva la siguiente ecuación exponencial:

$$25^{x-3} = \left(\frac{1}{5}\right)^{3x+18}$$

22. ¿Cuál de las siguientes expresiones representa lo que obtienes al despejar para “k” en la ecuación: $e^{2k} = 5$?

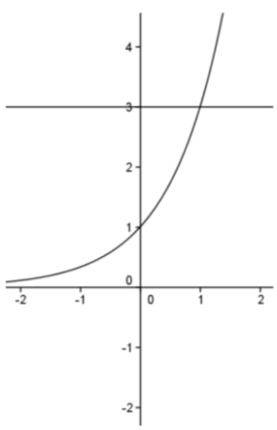
ⓐ $k = \frac{\ln 5}{2}$

ⓑ $k = \frac{5}{2}$

ⓒ $k = 2 \cdot \ln 5$

ⓓ $k = \ln(5) - 2$

23. Considera la siguiente grafica de $y = 3^x$ y $y = 3$. La coordenada de x del punto de intersección de ambas curvas representa la solución a la ecuación __________.



ⓐ $3^x - 3 = 0$

ⓑ $3^x = 0$

ⓒ $x = \ln(3)$

ⓓ $x = 3^x$

24. Resuelve la siguiente ecuación exponencial: $3x^3 = 9^x$

ⓐ $\{-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}\}$

ⓑ $\{\sqrt{3}, 3, -\sqrt{9}\}$

ⓒ $\{\sqrt{9}, -3, \sqrt{3}\}$

ⓓ $\{-\sqrt{3}, 9, \sqrt{3}\}$

25. Halla el valor de x si: $e^{2x} = 5$

ⓐ 1

ⓑ $\text{In } 2$

ⓒ $\frac{\ln(2)}{5}$

ⓓ $\frac{\ln(5)}{2}$

ES.A.19.0 Clasifica sucesiones como aritméticas, geométricas o ninguna y desarrolla formulas para hallar los términos generales y las sumas relacionadas.

Una **sucesión** es una función *f* cuyo dominio es el conjunto de números naturales. Los términos de la sucesión son los valores de la función $\{a_n\} = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$. Hay varios tipos de sucesiones, dos muy importantes son las *aritméticas* y las *geométricas*. Una **sucesión aritmética** es aquella en la que la diferencia entre dos términos consecutivos es igual a una constante *d* (positiva o negativa), es decir, $a_n - a_{n-1} = d$. Una **sucesión geométrica** es aquella en la que el cociente entre dos términos consecutivos una constante q, es decir, $\frac{a_n}{a_{n-1}} = q$.

26. Halla la suma de los primeros 10 términos de la siguiente serie geométrica:

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\ldots$$

ⓐ $\frac{29520}{19680}$

ⓑ $\frac{29524}{19683}$

ⓒ $\frac{18151}{32651}$

ⓓ $\frac{30231}{20714}$

27. Halla la suma de los primeros 10 términos de la siguiente serie aritmética:

$$2+7+12+17+22+\ldots$$

ⓐ 245

ⓑ 244

ⓒ 250

ⓓ 239

ES.A.14.0 Crea ecuaciones que describan números o relaciones.

28. Encuentra las soluciones del siguiente sistema de ecuaciones: $x^2+y^2=8 \quad y=x$

ⓐ (8,8) y (-8,-8)

ⓑ (8,-8) y (-8,8)

ⓒ (2,-2) y (-2,2)

ⓓ (2,2) y (-2,-2)

29. Hallar las soluciones del siguiente sistema de ecuaciones: $x^2 + y^2 = 8$ $\quad y = x$

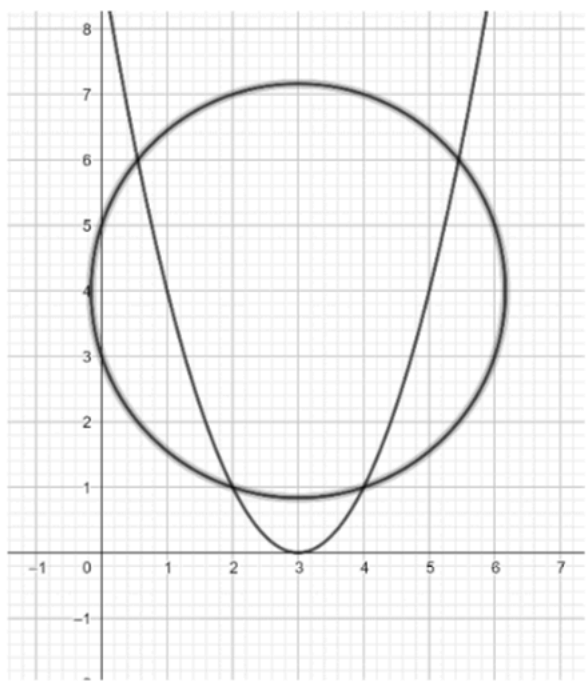
ⓐ (8,8) y (-8,-8)

ⓑ (8,-8) y (-8,8)

ⓒ (2,-2) y (-2,2)

ⓓ (2,2) y (-2,-2)

30. En la figura se muestra el dibujo de una ecuación cuadrática y un círculo.



¿Cuántas soluciones tiene el sistema formado por esas dos ecuaciones?

ⓐ 4

ⓑ 2

ⓒ 1

ⓓ 0

31. ¿Cuántas soluciones tiene el siguiente sistema de ecuaciones?

$$y = x - 1 \qquad y = x^2$$

ⓐ 3

ⓑ 2

ⓒ 1

ⓓ ninguna

ES.N.8.0 Realiza operaciones en matrices y usa matrices en aplicaciones.

Matrices
Una **matriz** es un conjunto de números reales, que están dispuestos en «m» filas y en «n» columnas:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

A los números que forman la matriz se les llama **elementos**.
El número de filas por el número de columnas se denomina **dimensión** de la matriz y se designa como m x n, siendo m el número de filas y n el número de columnas.
Por ejemplo, estas son matrices de diferentes dimensiones:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 0 & -8 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \quad C=\begin{pmatrix} 6 & -1 & -2 \\ -8 & 7 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Cuando decimos que una matriz es de orden o dimensión 3 x 4 estamos diciendo que se trata de una matriz de 3 filas y 4 columnas.

32. Halla el producto de:

$$\begin{bmatrix} 4 & 6 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \_\_\_\_\_\_$$

ⓐ [38]

ⓑ [30]

ⓒ [4]

ⓓ [-2]

33. Resuelve:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{bmatrix} =$$

ⓐ $\begin{bmatrix} 4 & 6 & 10 \\ 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

ⓑ $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 6 & 0 & 0 \\ 10 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

ⓒ $\begin{bmatrix} 10 & 2 & 2 \\ 6 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

ⓓ $\begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 6 & 0 & 2 \\ 10 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

34. Encuentra el valor de x si:

$$5\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ x-3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 10 \\ 20 & 10 \end{bmatrix}$$

ⓐ $x = 7$

ⓑ $x = 4$

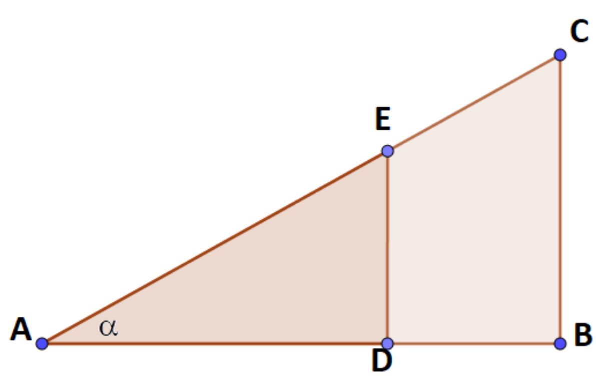
ⓒ $x = -7$

ⓓ $x = -4$

ES.G.32.1 Demuestra teoremas sobre triángulos, que incluyen lo siguiente: una recta paralela a uno de los lados de un triángulo divide a los otros dos proporcionalmente, y viceversa; demuestra el teorema de Pitágoras al usar semejanza de triángulos.
ES.G.33.3 Usa razones trigonométricas y el teorema de Pitágoras para resolver triángulos rectángulos en problemas aplicados.

Si dos triángulos son semejantes, entonces sus lados correspondientes son proporcionales y sus ángulos correspondientes son congruentes. Por ejemplo, si los triángulos de la imagen son rectángulos en B y en D, entonces se puede afirmar que:

$$\tan\alpha = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{AD}}$$



35. En el triángulo rectángulo ABC, los catetos miden a = 12 cm y b = 16 cm. Si todos los lados se reducen a un quinto de su valor inicial, ¿cuánto es el valor del coseno del mayor de los ángulos agudos?

ⓐ $\cos\beta = \frac{4}{5}$

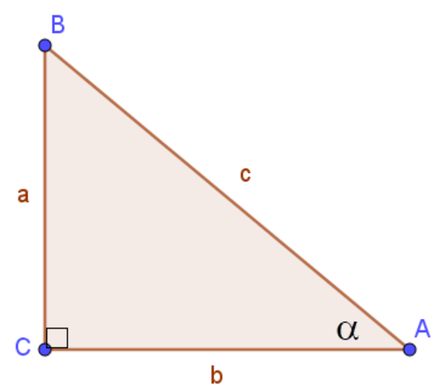
ⓑ $\cos\beta = \frac{3}{5}$

ⓒ $\cos\beta = \frac{3}{4}$

ⓓ $\cos\beta = \frac{5}{3}$

Las razones trigonométricas en un triángulo rectángulo son una comparación de las medidas de sus lados y uno de sus ángulos agudos. En el triángulo recto ABC de la imagen se pueden definir las siguientes razones:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{a}{c},\ \cos\alpha = \frac{b}{c},\ \tan\alpha = \frac{a}{b}$$



36. Un edificio produce una sombra de 40 metros cuando los rayos del Sol inciden con un ángulo de 38° respecto de la horizontal. Con estos datos, ¿qué expresión permite calcular la altura del edificio?

ⓐ $h = 40m \cdot \tan 38°$

ⓑ $h = \frac{40m}{\tan 38°}$

ⓒ $h = 40m \cdot \cos 38°$

ⓓ $h = \frac{40m}{\operatorname{sen} 38°}$

ES.E.41.1 Usa la media y la desviación estándar de un conjunto de datos para ajustarla a una distribución normal y para estimar porcentajes de población. Sabe que hay conjuntos de datos para los cuales dicho proceso no es el adecuado. Usa calculadoras, hojas de cálculo y tablas para estimar las áreas bajo de una curva normal.

Medidas tendencia central

La **media** es el promedio de todos los datos.

La **moda** es el valor que aparece con mayor frecuencia en el conjunto de datos.

La **mediana** es el valor del medio del conjunto de datos, ordenado en orden ascendente.

Medidas de dispersión

En estadística, las medidas de dispersión describen cuán lejos se esparce los datos de la medida del centro. Hay tres tipos principales de dispersión:

El **rango** es la diferencia entre el valor más alto y el más bajo en los datos.

La **desviación estándar** la raíz cuadrada de la varianza.

La **varianza** es la media de los cuadrados de la distancia de cada elemento de los datos (x_i) está de la media.

37. La media de una población es 683.5g y su desviación estándar 52.1 g. Determine la puntuación estándar para el valor 652.1

ⓐ Z = -6.38

ⓑ Z = 0.602

ⓒ Z = - 0.602

ⓓ Z = 6.38

38. La estatura promedio de los empleados de una empresa muy grande es de 1.65 m, con una desviación estándar de 6.2 cm. Suponga una distribución normal y determine qué porcentaje de los empleados mide más de i.57 m

ⓐ 59.5%

ⓑ 90.15%

ⓒ 40.5%

ⓓ 9.75%

39. Se realiza una investigación con unos alumnos de una universidad y se dese establecer un intervalo de confianza (probabilidad) de que al tomar 30alumnos de una escuela se tiene una media de 100 con una desviación estándar de 15 y con un nivel de significación del 5%.

ⓐ 95.59 a 104.49

ⓑ 95.59 a 104.49

ⓒ 94.52 a 105.47

ⓓ 95.48 a 104.51

40. ¿Qué tamaño debería tener la muestra para usar la t de $student$ en lugar de la distribución normal?

ⓐ Menor de 30

ⓑ Mayor a 30

ⓒ Igual a 30

ⓓ No importa el tamaño de la muestra